MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Soit une urne contenant nb boules réparties en b sous-ensembles, chacun de ces sous-ensembles étant formé de n boules indiscernables de même couleur et chaque sous-ensemble correspondant à une couleur différente ($nb \geqslant 1$). On appelle « tirage sans remise de cardinal a » une sélection de a boules prises dans l'urne, deux tirages étant égaux si et seulement si les nombres de boules de même couleur sont les mêmes dans les deux tirages. On note $\binom{b}{a}_n$ le nombre de tels tirages, pour $a < 0$ ou $a > nb$, on posera $\binom{b}{a}_n = 0$. Pour $b = 0$, on posera $\binom{0}{a}_n = 0$ si $a \neq 0$ et $\binom{0}{0}_n = 1$.

I. 1° Démontrer l'égalité :

$$\binom{b}{a}_n = \sum_{c=a-n}^{a} \binom{b-1}{c}_n \qquad (nb \geqslant 1) .$$

2° Dans le cas $0 \leqslant a \leqslant nb$, déterminer des entiers u et v tels que :

$$\binom{b}{a}_n = \sum_{c=u}^{v} \binom{b-1}{c}_n$$

et que

$$\binom{b-1}{c}_n \neq 0 \qquad \text{pour} \quad u \leqslant c \leqslant v .$$

(On notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x et y ; $\max(x, y)$ le plus grand des deux nombres x et y.)

3° Démontrer (par récurrence sur b) l'identité polynomiale :

$$\sum_{a=0}^{nb} \binom{b}{a}_n X^a = (1 + X + X^2 + \ldots + X^n)^b \qquad (b \geqslant 0) .$$

En déduire

$$\sum_{a=0}^{nb} \binom{b}{a}_n$$

4° Calculer $\binom{b}{a}_n$ pour $n = 2$, $b \leqslant 5$, $a \leqslant 10$.

5° Comparer les entiers $\binom{b}{a}_n$ et $\binom{b}{nb-a}_n$ en utilisant leur définition ou le résultat de la question I. 3°.

II. 1° Soit un entier $p \geqslant 1$. Calculer le nombre dérivé d'ordre $(p-1)$ du polynôme $X^{b-1}(1-X)^p$ pour la valeur $X = 1$ (si $p = 1$, le nombre dérivé d'ordre 0 n'est autre que la valeur de la fonction polynomiale pour $X = 1$).

2° Même problème pour le polynôme

$$\sum_{m=q}^{p} (-1)^m C_p^m X^{b+m-1}$$

où $q = \max(0, p-b)$.

3° Démontrer l'égalité :

$$\sum_{m=q}^{p} (-1)^{p-m} C_b^{p-m} C_{b+m-1}^{m} = 0 .$$

4° On pose

$$Q(X) = \sum_{m=0}^{nb} C_{b+m-1}^{m} X^m .$$

Démontrer l'existence d'un polynôme $R(X)$ tel que

$$1 = (1-X)^b Q(X) + X^{nb+1} R(X) .$$

5° Démontrer l'existence d'un polynôme $S(X)$ tel que

$$(1 + X + \ldots + X^n)^b = (1-X^{n+1})^b Q(X) + X^{nb+1} S(X) .$$

6° Démontrer l'égalité :

$$\binom{b}{a}_n = \sum_{r=0}^{S} (-1)^r C_b^r C_{b+a-(n+1)r-1}^{a-(n+1)r}$$

où S est le plus grand entier inférieur ou égal à b et à $\frac{a}{n+1}$ (on pourra écrire $X^a = X^{(n+1)r} X^{a-(n+1)r}$.

7° Montrer que, pour $a \leqslant n$, on a l'égalité :

$$\binom{b}{a}_n = \frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}$$

8° Étudier la suite qui, à l'entier $n \geqslant 1$, associe le nombre $\binom{b}{a}_n$: est-elle monotone?

III. On considère une variable aléatoire α qui prend les valeurs entières a de 0 à nb, avec la loi de probabilité suivante :

$$p_a = \text{pr}\,(\alpha = a) = \lambda \binom{b}{a}_n ,$$

où λ est une constante.

1° Calculer λ.

2° Calculer l'espérance mathématique μ de α (on pourra considérer le polynôme $\omega\,(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$ ainsi que $\omega'\,(1)$).

3° Calculer la dérivée seconde de $[\omega(X)]^b$ pour $X = 1$ (dans le calcul de $\omega''(1)$, on utilisera l'égalité :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\Big) .$$

4° Calculer la variance V et l'écart-type de α en écrivant l'égalité :

$$\sum_{a=0}^{nb} a^2 p_a = \sum_{a=0}^{nb} a\,(a-1)\,p_a + \sum_{a=0}^{nb} a p_a .$$

5° Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de l'écart-type σ pour $b = 1\,200$, $n = 10^5$.

IV. 1° Déterminer deux entiers u et v tels que, si $0 \leqslant r \leqslant b$:

$$\binom{b}{a}_n = \sum_{t=u}^{v} \binom{c}{t}_n \binom{b-c}{a-t}_n$$

et que $\binom{c}{t}_n \binom{b-c}{a-t}_n \neq 0$ pour $u \leqslant t \leqslant v$ (écrire $X^a = X^t X^{a-t}$).

2° Soit α' une variable aléatoire, indépendante de α, qui suit une loi analogue pour laquelle $n' = n$, $b' \geqslant 1$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire définie par $\beta = \alpha + \alpha'$. Retrouver ce résultat en déterminant effectivement la loi de probabilité de β.

3° Étudier le cas particulier $n = 1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail